MATHEMATIQUES

DURÉE : 4 heures

On désigne dans tout le problème par E un espace vectoriel euclidien ou hermitien complet, dont le produit scalaire est noté $x.y$, la norme associée $\|x\| = \sqrt{x.x}$ et la distance associée $d(x, y) = \|x - y\|$.

INTRODUCTION ET NOTATIONS

A

Une partie A de E est dite convexe si elle est non vide et si, pour tout $x \in A$ tout $y \in A$ et tout λ réel tel que $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, on ait $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$.

1° Montrer que l'intersection de deux parties convexes de E, si elle est non vide, est convexe.

2° Soit l un nombre réel strictement positif et δ un nombre réel vérifiant $0 \leqslant \delta < l$, on pose $B = \{x \in E ; \|x\| < l\}$ et $B' = \{x \in E ; \|x\| \leqslant l + \delta\}$. Si P est une partie convexe de E contenue dans $B' \cap \complement_E B$, montrer que, pour tout x et y dans P, on a $\|x - y\| \leqslant \sqrt{12\, l\delta}$.

(On pourra utiliser l'égalité de la médiane :

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.)$$

B

1° Si A est une partie bornée non vide de E, montrer que l'ensemble des nombres réels $d(x, y)$ pour $x \in A$ et $y \in A$ est borné. On appelle diamètre de A et le note $\delta(A)$ la borne supérieure de cet ensemble.

2° Soit $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de parties fermées, bornées, non vides de E telle que $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $\lim_{n \to \infty} \delta(A_n) = 0$.

a. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de points de E telle que $x_n \in A_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, montrer que cette suite est de Cauchy, donc convergente. On pose $y = \lim_{n \to \infty} x_n$, montrer que $y \in A_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

b. En déduire que $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n = \{y\}$.

C

On appelle distance du point $x \in E$ à une partie non vide A de E le réel, noté $d(x, A)$, borne inférieure de l'ensemble des nombres réels $d(x, y)$ pour $y \in A$.

I

On prend ici pour E le **R**-espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ muni de la norme euclidienne $\|(x, x')\| = \sqrt{x^2 + x'^2}$ pour $(x, x') \in \mathbf{R}^2$.

1° Soit $A = \{(x, x') \in \mathbf{R}^2 ; \ x \leqslant 1 \ \text{ et } \ x' \leqslant 1\}$.

a. Montrer que A est une partie convexe fermée de E.

b. Déterminer $d(X, A)$ suivant la position du point $X = (x, x')$ dans E, et montrer qu'il existe $Y = (y, y')$ unique dans A tel que $d(X, Y) = d(X, A)$ On pose alors $Y = h(X)$.

c. Étudier la continuité, puis la différentiabilité de l'application h.

2° Montrer sur un exemple simple que la propriété « il existe $Y \in A$ unique tel que $d(X, A) = d(X, Y)$ » est inexacte si la norme sur E n'est pas euclidienne.

II

On revient à un espace vectoriel euclidien ou hermitien complet E quelconque et on se propose de montrer que, si A est une partie convexe et fermée de E, alors pour tout $x \in E$, il existe y unique, $y \in A$, tel que $d(x, y) = d(x, A)$.

1° On pose $l = \inf_{z \in A} \|z\|$, $B_n = \left\{z \in E ; \ \|z\| \leqslant l + \frac{1}{n}\right\}$ et $A_n = A \cap B_n$.

a. Montrer que $l = 0$ si et seulement si $0 \in A$.

b. On suppose $l \neq 0$. Montrer que $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de fermés convexes vérifiant les conditions du B 2°, en déduire qu'il existe y unique dans A tel que $l = \|y\|$.

c. En utilisant le A 2°, montrer que pour tout $x \in E$, il existe y unique dans A tel que $d(x, y) = d(x, A)$.

.../...

2° On désigne alors, dans toute la suite du problème, par φ_A l'application qui à $x \in E$ fait correspondre l'unique élément y dans A tel que $d(x, y) = d(x, A)$.

a. Montrer que $y = \varphi_A(x)$ est le seul point de A tel que, pour tout $z \in A$, la partie réelle du nombre $(x - y).(z - y)$ soit négative ou nulle.

b. Majorer $\|\varphi_A(x) - \varphi_A(x')\|$ et en déduire que l'application φ_A est continue.

III

On suppose toujours que E est un espace vectoriel euclidien ou hermitien complet quelconque.

1° Soit $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une famille de parties convexes fermées de E telle que $H_{n+1} \supset H_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $H = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} H_n$.

a. Montrer que H est une partie convexe de E, puis que $\bar{H}$ (adhérence ou fermeture de H) est convexe.

b. On pose $y_n = \varphi_{H_n}(x)$ pour x donné dans E, montrer que la suite $(\|x - y_n\|)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.

c. Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy, donc convergente.

d. A-t-on l'égalité $\lim_{n\to\infty} y_n = \varphi_{\bar{H}}(x)$?

2° Soit $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une famille de parties convexes fermées telle que $K_{n+1} \subset K_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On pose $K = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} K_n$ et $z_n = \varphi_{K_n}(x)$ pour x donné dans E. Montrer, sur un exemple simple, que la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'a pas de limite en général.

IV

On désigne par E l'ensemble formé des suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres complexes telles que la série $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ converge.

1° *a.* Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont dans E, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n$ est absolument convergente.

b. Montrer que E est un espace hermitien pour le produit scalaire $x.y = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n$ si $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont dans E.

On admettra que E est complet.

2° On désigne par A la partie de E formée des suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que $|x_n| \leqslant 1$.

a. Montrer que A est une partie convexe fermée de E.

b. Déterminer $\varphi_A(x)$ pour $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans E.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail